数理解析研究所講究録 第2095巻 2018年 227-235

Hausdorff 容量による Choquet-Lorentz 空間上の極大関数の有界性について

日本大学　理工学部　齋藤洋樹
Hiroki Saito
College of Science and Technology, Nihon University

1　導入

本稿では Choquet-Lorentz 空間上で種々の極大関数の有界性を論じる. Choquet-Lorentz 空間とは, Hausdorff 容量による Choquet 積分で定義された関数空間である. 特に本稿では, 荷重付 Hausdorff 容量について議論する. なお本研究は, 田中仁氏 (筑波技術大学), 渡辺俊一氏 (東京情報大学) との共同研究である.

1980 年代から, 自己相似性を持つ図形の複雑さを表す指標としてフラクタル次元による解析が行われるようになり, 解析学で重要な役割を果たすようになった [13]. また, 掛谷集合と呼ばれる $\mathbb{R}^n$ の部分集合 (あらゆる方向の単位線分を含む測度零のコンパクト集合) は, 測度論の言葉では測度零として無視されてしまうが, この集合の Hausdorff 次元を決定することは現在も未解決となっている. Hausdorff 次元は次のように定義される. まず準備として, $E \subset \mathbb{R}^n$, $d < n$ に対し,

$$H_\delta^d(E) := \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} r_j^d : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B(x_j, r_j), r_j \le \delta\right\} \tag{1}$$

とする. ただし, $B(x_j, r_j)$ は中心 x_j, 半径 r_j の開球であり, 下限は半径が δ 以下の開球による E の被覆全体をわたってとる. δ を小さくすると H_δ^d は単調に増加するので,

$$H_0^d(E) = \lim_{\delta\to 0} H_\delta^d(E)$$

と定め, d 次元 Hausdorff 測度と呼ぶ. このとき,

- $H^t(E) < \infty \implies H^s(E) = 0\ (t < s)$.
- $H^s(E) > 0 \implies H^t(E) = \infty\ (t < s)$.

が成り立つので, E の Hausdorff 次元を

$$\dim_H(E) = \inf\{s \ge 0 : H^s(E) = 0\}$$

によって定義する. n 次元の掛谷集合の Hausdorff 次元は n であることが予想されているが, $n = 2$ のときは示されているが, $n \ge 3$ に対しては部分的な結果しか得られていない.

Hausdorff 測度と類似の概念だが, それよりも扱いやすい Hausdorff 容量 (Hausdorff content, また capacity) を定義する [5]. (1) で形式的に $\delta = \infty$ としたものと解釈できるが,

$$H^d(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} l(Q_j)^d : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j\right\} \tag{2}$$

で d 次元 Hausdorff 容量を定める．ここで, Q_j は $\mathbb{R}^n$ の立方体であり, $l(Q_j)$ は立方体の辺長を表す．球と立方体は本質的な違いはないが, 本稿では以下立方体で議論することにする．特に d が空間の次元 n と一致するときには, 本質的に Lebesgue 測度と一致する．1980 年代から Hausdorff 容量による積分を定義して, Hardy-Littlewood の極大関数の有界性を調べる研究がなされるようになった [1, 2, 7, 10].

2 Hausdorff 容量による積分

Hausdorff 容量は $\mathbb{R}^n$ の任意の部分集合に定義された非加法的集合関数となるため注意が必要である．まず次の性質が成り立つ.

(a) $H^d(\emptyset) = 0$.
(b) $E \subset F$ ならば $H^d(E) \le H^d(F)$.

また, 定義式 (2) において, 下限を動く立方体を 2 進立方体としたものを $\widetilde{H}^d$ とかくと, さらに次の性質が成り立つ.

(c) $\widetilde{H}^d \sim H^d$.
(d) $E_n \subset E_{n+1} \subset \cdots$ ならば $\widetilde{H}^d\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{H}^d(E_n)$.
(e) $\widetilde{H}^d(E \cup F) + \widetilde{H}^d(E \cap F) \le \widetilde{H}^d(E) + \widetilde{H}^d(F)$

特に (d), (e) は重要で, 後で定義する Choquet 積分が良い性質を持つ．(c) も鑑みて, 以後は 2 進立方体で定義された Hausdorff 容量を考えることにし, $\widetilde{H}^d$ をあらためて H^d と表すことにする.

非加法的測度はそれ自体非常に一般的な研究がなされており, それから導かれる積分を種々のものが考えられている．ここでは Choquet 積分と呼ばれる次の方法で積分を定義する．すなわち, 非負関数 f に対し,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}H^d = \int_0^\infty H^d(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\})\,\mathrm{d}t.$$

積分の性質は非加法的測度の性質に強く影響を受ける．(d), (e) の性質から,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{n=1}^{\infty} f_n\,\mathrm{d}H^d \le \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n\,\mathrm{d}H^d$$

を示すことができるが, 線形性は成り立たない．また, Hölder の不等式を用いる際にも注意が必要である.

3 Adams, Orobitg-Verdera の結果

前節で注意したように, 非加法的測度に関する Choquet 積分は通常の Lebesgue 積分と異なり, 線形性が成り立たないことや Hölder の不等式など注意が必要である．だが, Hausdorff 容量に現れる d が空間次元 n よりも真に小さいとき, 興味深い現象が起こる．次は 1988 年の Adams の結果である．以下 M で Hardy-Littlewood の極大関数を表すとする.

定理 1 ([1]). $0 < d < n$ とする．このとき，

$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)\,\mathrm{d}H^d \le C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,\mathrm{d}H^d$$

が成り立つ．ただし，C は n, d にのみ依存する．

右辺の積分が有限となる f 全体を $L^1(H^d)$ とかくことにすれば，M が $L^1(H^d)$ で有界となることを意味する．これは通常の Lebesgue 空間 $L^1(\mathbb{R}^n)$ では成り立たない性質である．しかしながらこの結果は最良ではなく，1998 年に Orobitg と Verdera らによって次の結果が得られた．

定理 2 ([7]). $0 < d \le n$ とする．このとき，

(1)

$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^p\,\mathrm{d}H^d \le C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,\mathrm{d}H^d, \quad d/n < p.$$

(2)

$$H^d(\{x\in\mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}) \le C\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|f(x)|}{t}\right)^{\frac{d}{n}}\mathrm{d}H^d$$

ただし，C は n, d にのみ依存する．

$p = \frac{d}{n}$ が endpoint であり，弱型の不等式が成り立つことを意味している．また $d = n$ のときには通常の Lebesgue 空間に関する結果を含意する．現在これらの結果は，Xiao によって熱方程式の解作用素に関する Carleson の埋め込み定理を調べる際に応用されている [12].

Adams はさらに上記の結果を次の Choquet-Lorentz 空間へ拡張している．以下 M_α によって分数冪極大関数

$$M_\alpha f(x) = \sup_Q \mathbf{1}_Q(x) l(Q)^\alpha \fint_Q |f(y)|\,\mathrm{d}y, \quad 0\le\alpha<n$$

を表す．ここで，$\fint_Q f$ は Q 上の積分平均 $\frac{1}{|Q|}\int_Q f$ である．また，

$$\|f\|_{L^{p,q}(H^d)} = \begin{cases} \left[\displaystyle\int_0^\infty (t^p H^d(|f|>t))^{\frac{q}{p}}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right]^{\frac{1}{q}} & (1\le q<\infty) \\ \displaystyle\sup_{t>0} tH^d(|f|>t)^{\frac{1}{p}} & (q=\infty). \end{cases}$$

とする．これは quasi-ノルムとなり，ノルムにならない (三角不等式が成り立たない) が，$p > 1$ のときには適当なノルムと同値になる．この Choquet-Lorentz に対し，Adams は次を示した．

定理 3 ([2]). $0 < d \le n$, $0 \le \alpha < n, p \le q$ とする．このとき，

(1) $d/n < p < d/\alpha$ とし，$\delta := \frac{p}{q}(d - \alpha p)$ と定めたとき，

$$\|M_\alpha f\|_{L^{q,p}(H^\delta)} \le C\|f\|_{L^p(H^d)}$$

が成り立つ．

(2) $p=d/n$, $\delta=q(n-\alpha)$ のとき,

$$\|M_\alpha f\|_{L^{q,\infty}(H^\delta)} \le C\|f\|_{L^{d/n}(H^d)}$$

が成り立つ.

注意.

(i) 定理 3 の (1) において, $\alpha=0$ とした場合は, $p<\infty$ と解釈する.
(ii) [2] では, $p=d/\alpha$ の場合も議論されているが, 本稿では (1), (2) に関する拡張に興味があるのでここでは述べなかった.

4 荷重付 Hausdorff 容量

本稿の主な目的は, Adams の 1998 年の結果に対し, 荷重理論を構築することである. w を $\mathbb{R}^n$ 上の非負局所可積分関数とし, 以後 w を荷重と呼ぶ. $E\subset\mathbb{R}^n$ に対し, d 次元荷重付 Hausdorff 容量を次で定める.

$$H_w^d(E)=\inf\left\{ ⨍_{Q_j} w\,\mathrm{d}x l(Q_j)^d : E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j\right\},$$

ここで下限は E の 2 進立方体による被覆全体でとる. 荷重付 Hausdorff 容量については Turesson の [11] が詳しい. 最初は L. Tang によって得られた次の結果である.

定理 4 ([10]). *w は Muckenhoupt の A_1 条件を満たすとする. $0\le\alpha<n$, $0<d<n$, $0<d+\alpha<n$ とする. このとき, $d/n<p<d/\alpha$ ならば*

$$\int_{\mathbb{R}^n}(M_\alpha f)^p\,\mathrm{d}H_w^{d-\alpha p} \le C\int_{\mathbb{R}^n}|f|^p\,\mathrm{d}H_w^d$$

が成り立つ. ただし, C は d,α,n,p と A_1 定数に依存する.

この結果は, $p=q$, $w\equiv 1$ とすると, Adams の結果 [2] の荷重なしの場合を含意する.

5 主結果

5.1 定理と注意

L. Tang の結果は荷重に対して Muckenhoupt の A_1 条件が仮定されている. 我々は荷重に対して条件を課さず, Adams の Choquet-Lorentz 空間に荷重を付加し, 一般的な形で定式化した. その際, 右辺の積分に w に対する極大関数のファクタが現れ, Fefferman-Stein 型と呼ぶべき不等式となる. まず荷重付 Choquet-Lorentz 空間を次で定義する.

$$\|f\|_{L^{p,q}(H_w^d)}=\begin{cases}\left[\displaystyle\int_0^\infty (t^p H_w^d(|f|>t))^{\frac{q}{p}}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\right]^{\frac{1}{q}} & (1\le q<\infty)\\ \displaystyle\sup_{t>0} tH_w^d(|f|>t)^{\frac{1}{p}} & (q=\infty).\end{cases}$$

以下が本稿の主定理である．パラメータが多く煩雑に見えるが，Adams の定理からさらにパラメータ γ を加え，右辺に現れる分数冪極大関数のパラメータとの関連を見出した点が重要である．この現象は L. Tang のように A_1 を仮定した場合には見えなくなってしまい，荷重との本質的相互関係を失ってしまうことになる．

定理 5. (1) *Let* $0 < d \le n$, $0 \le \alpha < n$, $0 \le \gamma \le \alpha$, *and* $\delta = \frac{q}{p}(d-(\alpha-\gamma)p)$. *We assume* $d/n < p \le q < n/\gamma$, $p < d/\alpha$. *Then*

$$\|M_\alpha f\|_{L^{q,p}(H^\delta_w)} \le C\|f\|_{L^p(H^d_{(M_{\gamma q}w)^{p/q}})}$$

(2) *Let* $0 < d \le n$, $0 \le \alpha < n$ *and* $0 \le \gamma \le \alpha$. *For* $d/n \le q \le n/\alpha$ *and* $p = d/n$, *there is a constant* C *such that*

$$\sup_{t>0} tH^\delta_w(M_\alpha f > t)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p (M_{\gamma q}w)^{p/q}\,\mathrm{d}H^d\right)^{1/p}$$

with $\delta = q(n-\alpha+\gamma)$.

注意.

(i) 定理 5 は特別な場合として過去の先行研究を含んでいる．注意しなければならないのは，$\gamma > 0$ の場合に $w \equiv 1$ とはできない．これは，分数冪極大関数に対しては定数関数を代入することができないからである．

(ii) 定理 5 の (1), (2) では右辺の荷重の位置が異なるが，現段階では統一した形で証明することができていない．すなわち，(2) に対して，

$$\sup_{t>0} tH^\delta_w(M_\alpha f > t)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p\,\mathrm{d}H^d_{(M_{\gamma q}w)^{p/q}}\right)^{1/p}$$

なる不等式を証明する方法を見出せていない．(1) に対しても同様である．これらは今後の研究課題である．

5.2 証明の概要

基本的な着想は Orobitg-Verdera による．

次の補題が決定的である．

補題 5.1. *Let* $0 < d < n$, $0 < \alpha < n$, $0 \le \gamma \le \alpha$, *and* $\delta = \frac{q}{p}(d-(\alpha-\gamma)p)$. *We assume* $d/n < p \le q < n/\gamma$ *and* $p < d/\alpha$. *Then we have that*

$$\|M_\alpha[\mathbf{1}_Q]\|^p_{L^{q,p}(H^\delta_w)} \le C_{n,p,d} \fint_Q (M_{\gamma q}w)^{p/q}\,\mathrm{d}x\, l(Q)^d$$

for all dyadic cubes $Q \in \mathcal{D}$ *and for any weight* w.

これを認めると, 次のように主定理の (1) が示される. 最初に $0<p\le q<\infty$ に対して次が成り立つことが容易に確認できることに注意しよう.

$$\|M_\alpha f\|_{L^{q,p}(H_w^\delta)}^p=\frac{1}{p}\|(M_\alpha f)^p\|_{L^{q/p,1}(H_w^\delta)}.$$

$f\ge 0$ と仮定してよい. H_w^d の定義より各 $k\in\mathbb{Z}$ に対し, 包含関係に対して極大な 2 進立方体の族 $\{Q_j^k\}_j$ が存在し,

$$\{x\in\mathbb{R}^n:\,2^k<f(x)\le 2^{k+1}\}\subset\bigcup_j Q_j^k$$

かつ

$$\sum_j \fint_{Q_j^k}(M_{\gamma q}w)^{p/q}\,\mathrm{d}x\,l(Q_j^k)^d\le 2H^d_{(M_{\gamma q}w)^{p/q}}(\{x\in\mathbb{R}^n:\,2^k<f(x)\le 2^{k+1}\}).$$

を満たす. $g=\sum_k 2^{p(k+1)}\mathbf{1}_{A_k}$ とおく, ここで $A_k=\bigcup_j Q_j^k$ である. すると $f^p\le g$ が成り立つ.

定理を $1\le p$ の場合に示そう. $p<1$ の場合もほぼ同様である. このとき,

$$(M_\alpha f)^p\le M_{\alpha p}(f^p)\le M_{\alpha p}(g)\le\sum_k 2^{p(k+1)}\sum_j M_{\alpha p}(\mathbf{1}_{Q_j^k}).$$

が成り立つ. $L^{p,q}$ の第 1 の指数が 1 よりも大きいとき, 適切なノルムと同値になることを用いる. 今 $q/p>1$ であるから,

$$\frac{1}{p}\|(M_\alpha f)^p\|_{L^{q/p,1}(H_w^\delta)}\le C\frac{1}{p}\sum_k 2^{p(k+1)}\sum_j\|M_{\alpha p}(\mathbf{1}_{Q_j^k})\|_{L^{q/p,1}(H_w^\delta)}.$$

とできる. 補題 5.1 より,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\sum_k 2^{p(k+1)}\sum_j\|M_{\alpha p}(\mathbf{1}_{Q_j^k})\|_{L^{q/p,1}(H_w^\delta)}\\
\le&\frac{1}{p}\sum_k 2^{p(k+1)}\sum_j C_{n,p,d}\fint_{Q_j^k}(M_{\gamma q}w)^{p/q}\,\mathrm{d}x\cdot l(Q_j^k)^d\\
\le&C\sum_k 2^{p(k+1)}H^d_{(M_{\gamma q}w)^{p/q}}(\{x:2^k<f(x)\le 2^{k+1}\})\\
\le&C\sum_k\frac{2^{2p}}{2^p-1}\int_{2^{p(k-1)}}^{2^{pk}}H^d_{(M_{\gamma q}w)^{p/q}}(\{x:f(x)^p>t\})\,\mathrm{d}t\\
\le&C\int_{\mathbb{R}^n}f^p\,\mathrm{d}H^d_{(M_{\gamma q}w)^{p/q}},
\end{aligned}$$

となって証明が終わる. □

次に弱型の不等式 (2) を示そう. 決め手になるのは証明中に現れる (i), (ii), (iii) を満たすように部分族を選ぶ被覆補題である.

任意の $t>0$ に対し, 2 進立方体の極大な族 $\{Q_j\}$ を

$$\fint_{Q_j} f\,\mathrm{d}x l(Q_j)^\alpha > t$$

を満たすようにとる. すると,

$$\{x:\ M_\alpha f(x) > t\} = \bigcup_j Q_j.$$

が成り立つ.

Orobitg-Verdera の論文 [7] 中の Lemma 3 より,

$$t^q l(Q_j)^\delta \le \left(l(Q_j)^\gamma \int_{Q_j} f\,dx \right)^q \le C l(Q_j)^{\gamma q} \left(\int_{Q_j} f^p \,\mathrm{d}H^d \right)^{q/p}. \tag{3}$$

が成り立つ. ここで, [7] の Lemma 2 を修正し, 次のように立方体の族を選ぶ:

(i) 各 2 進立方体 Q に対し,

$$\sum_{Q_{j_m} \subset Q} l(Q_{j_m})^d \le 2 l(Q)^d;$$

(ii)

$$\bigcup_j Q_j \subset \left(\bigcup_m Q_{j_m} \right) \cup \left(\bigcup_k \widetilde{Q}_k \right);$$

(iii) 各 k に対し,

$$l(\widetilde{Q}_k)^d \le \sum_{Q_{j_m} \subset \widetilde{Q}_k} l(Q_{j_m})^d.$$

まず (ii) より,

$$t^q H_w^\delta \left(\bigcup_j Q_j \right) \le t^q \sum_m \fint_{Q_{j_m}} w \,\mathrm{d}x l(Q_{j_m})^\delta + t^q \sum_k \fint_{\widetilde{Q}_k} w\,\mathrm{d}x l(\widetilde{Q}_k)^\delta.$$

となる. 右辺第 1 項については (3) によって

$$\begin{aligned} t^q \fint_{Q_{j_m}} w\,\mathrm{d}x l(Q_{j_m})^\delta &\le C \fint_{Q_{j_m}} w\,\mathrm{d}x l(Q_j)^{\gamma q} \left(\int_{Q_{j_m}} f^p\,\mathrm{d}H^d \right)^{q/p} \\ &\le C \left(\int_{Q_{j_m}} f^p (M_{\gamma q} w)^{p/q} \,\mathrm{d}H^d \right)^{q/p}. \end{aligned}$$

とできる. 第 2 項については少々技巧的であるし, 紙数の関係で省略する. ここでは第 1 項の計算を進め, 先の被覆の (i) が本質的であることを説明しよう. $\widetilde{Q}_k$ の部分については

$$t^q \fint_{\widetilde{Q}_k} w\,\mathrm{d}x l(\widetilde{Q}_k)^\delta \le C \left(\sum_{Q_{j_m} \subset \widetilde{Q}_k} \int_{Q_{j_m}} f^p (M_{\gamma q} w)^{p/q} \,\mathrm{d}H^d \right)^{q/p},$$

とでき, あわせて

$$t^q H_w^\delta\left(\bigcup_j Q_j\right) \le C\left(\sum_m \int_{Q_{jm}} f^p (M_{\gamma q} w)^{p/q}\,\mathrm{d}H^d\right)^{q/p}$$
$$\le C\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p (M_{\gamma q} w)^{p/q}\,\mathrm{d}H^d\right)^{q/p},$$

とできる. ここで最後の不等号は, Lebesgue 測度なら自明であるが, (i) の条件から

$$\sum_m \int_{Q_{jm}} \le C \int_{\bigcup_m Q_{jm}}$$

が得られる. □

6 展望

補題 5.1 は強力であり, 他の極大関数の場合でも強型の有界性を導くことができる. 今 M_S で強極大関数を表すとする:

$$M_S f(x) = \sup_R \mathbf{1}_R(x) ⨍_R |f(y)|\,\mathrm{d}y$$

ただし上限は直方体 R をわたってとるのだが, 各辺は 2 進区間の直積となっているものとする. これを 2 進直方体 (dyadic rectangle) と呼ぼう. このとき次の補題が成り立つと予想される.

補題 6.1. 任意の *2* 進立方体 Q につき,

$$\int_{\mathbb{R}^n} M_S[\mathbf{1}_Q]^p\,\mathrm{d}H^d \le Cl(Q)^d$$

が成り立つ.

これが正しければ, 本稿の主定理の証明とまったく同様に強型の不等式を示すことができるが, 簡単な演習問題である.

参考文献

[1] D. R. Adams, *A note on the Choquet integrals with respect to Hausdorff capacity*, Function Spaces and Applications, Proc. Lund 1986, Lecture Notes in Math. 1302(Springer, Berlin, 1988) 115–124.

[2] D. R. Adams, *Choquet integrals in potential theory*, Publ. Mat. **42** (1998) 3–66.

[3] D. R. Adams and L. I. Hedberg, *Function Spaces and Potential Theory*, Springer-Verlag, Heidelberg-New York, 1996.

[4] D. Cruz-Uribe, SFO, *New proofs of two-weight norm inequalities for the maximal operator*, Georgian Math. J., **7** (2000), 33–42.

[5] Ábel Farkas and Jonathan M. Fraser, *On the equality of Hausdorff measure and Hausdorff content*, J. Fractal Geometry, **2** (2015), no. 4 403–429.

[6] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, volume 249 of Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2nd edition, 2008.

[7] J. Orobitg and J. Verdera, *Choquet integrals, Hausdorff content and the Hardy-Littlewood maximal operator*, Bull. London Math. Soc., **30** (1998), no. 2, 145–150.

[8] H. Saito, H. Tanaka and T. Watanabe, *Abstract dyadic cubes and the dyadic maximal operator with the Hausdorff content*, Bull. Sci Math., **140** (2016), 757–773.

[9] E. Sawyer, *Weighted norm inequalities for fractional maximal operators*, Proc. C.M.S. **1** (1981), 283–309.

[10] L. Tang, *Choquet integrals, weighted Hausdorff content and maximal operators*, Georgian Math. J. **18** (2011), no. 3, 587–596

[11] B. O. Turesson, *Nonlinear Potential Theory and Weighted Sobolev Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, 1736. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[12] J. Xiao, *Carleson embeddings for Sobolev spaces via heat equation*, J. Differential Equations **224** (2006), no. 2, 277–295.

[13] 山口昌哉, 畑政義, 木上淳, フラクタルの数理, 岩波講座 応用数学 (1993), 岩波書店.